Для прямых линий и для углов равенство тождественно конгруэнтности, но для ломаных линий, площадей и объемов равенство может существовать и без конгруэнтности; для доказательства равенства здесь приходится комбинировать между собой конгруэнтные части, согласно общим гипотезам о величинах. Первый пример этого встречается в „Началах", I, 35, когда Эвклид доказывает, что параллелограмы с одинаковыми основаниями и высотой равновелики.

Но только путем перехода к пределу можно установить величину кривых линий и поверхностей, величину плоской поверхности, ограниченной кривыми, а также величину большей части объемов; для получения их древние пользовались методом исчерпывания, причем приходилось вводить, отчасти, новые гипотезы. Мы это увидим при рассмотрении двенадцатой книги Эвклида, а также при анализе трудов Архимеда.

Зато мы должны тут же заметить, что способ применения Эвклидом в стереометрии аксиомы конгруэнтности, установленной им в 7-й аксиоме, содержит очень существенный пробел, а именно, полное отсутствие различения в его стереометрии между *конгруэнтностью* и *симметрией*. Но ясно, тем не менее, что Эвклид не считает конгруэнтными симметрические фигуры, ибо в этом случае он считал бы, что 7-я аксиома является достаточной основой для определения объемов. Между тем, он устанавливает новую гипотезу, которая годится как для конгруэнтных, так и для симметрических фигур. Согласно 10-му определению одиннадцатой книги *равны* и *подобны* пространственные фигуры, *ограниченные* одним и тем же количеством равных и подобных (т. е. конгруэнтных) плоских фигур. Это определение содержит — кроме введения терминов — определенную геометрическую гипотезу, следовательно, аксиому,— именно, что фигуры эти обладают одинаковым объемом*, и в теореме XI, 29 аксиома эта служит для доказательства того, что параллелепипеды с равными основанием и высотой равновелики; кроме того, из нее можно заключить (XI, 28), что обе трехгранные призмы, из которых складывается параллелепипед, равновелики. Но мы знаем, что призмы, которые перемещают в первом доказательстве, конгруэнтны и что трехгранные призмы последней теоремы могут быть превращены путем перемещения их частей в конгруэнтные призмы. Однако Эвклид, повидимому, не заметил этого, ибо тогда введение нового принципа для равенства тел было бы излишним и, следовательно, противоречило бы обычному его приему.

Седьмая аксиома была для указанной нами задачи только признаком геометрического равенства или, если угодно, определением этого равенства, но, во всяком случае, она содержит в себе крайне важную подлинную геометрическую гипотезу, или аксиому, выражающую тот факт, что в действительности, вообще, речь может итти о конгруэнтных фигурах, т. е. о перемещении фигур в другие части пространства. Согласно аксиоме Эвклида геометри-

* Коши (Cauchy) доказал, что фигуры этого рода, действительно, всегда конгруэнтны или симметричны.